21. septembra 2015

Vzorové riešenia

Ondrej Škopek <oskopek@matfyz.cz>

1. Triky s číslami

Zadanie

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3
- Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla
- Pripočítaj 6
- Vydeľ 4
- Odpočítaj svoje pôvodné číslo (znova)

Zodpoveďte a zdôvodnite:

- Aký výjde výsledok?
- Výjde ten istý výsledok aj pre iné vstupné čísla? Alebo iba od 1-5?
- Prečo to vždy výjde rovnako?

Riešenie

- Aký výjde výsledok?

  Skúste si to s aspoň jedným číslom.

- Výjde ten istý výsledok aj pre iné vstupné čísla? Alebo iba od 1-5?

  Pokusom by sa dalo overiť, že výjde rovnaký výsledok pre všetky čísla od 1-5. Čo ale, ak zoberieme čísla od 1-1000? Alebo všetky prirodzené čísla? Alebo všetky reálne čísla? Zdá sa nám, že by to mohlo vždy výjsť 3. Ale, nie sme si istý.

- Prečo to vždy výjde rovnako?

  Skúsme si operácie rozpísať. Označíme ľubovolné vstupné číslo x.

  - Vynásob ho dvomi $\to 2x$
  - Pripočítaj 2 $\to 2x + 2$
  - Vynásob 3 $\to (2x + 2) \cdot 3$
  - Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla $\to ((2x + 2) \cdot 3) - 2x$
  - Pripočítaj 6 $\to (((2x + 2) \cdot 3) - 2x) + 6$
  - Vydeľ 4 $\to ((((2x + 2) \cdot 3) - 2x) + 6)/4$
  - Odpočítaj svoje pôvodné číslo (znova) $\to (((((2x + 2) \cdot 3) - 2x) + 6)/4) - x$

Skúsme tento výraz zjednodušiť.

$$
\begin{aligned}
&(((((2x + 2) \cdot 3) - 2x) + 6)/4) - x \\
&= ((((((2x + 2) \cdot 3) - 2x) + 6)/4) - x \\
&= (((((6x + 6) - 2x) + 6)/4) - x \\
&= (((4x + 6) + 6)/4) - x \\
&= ((4x + 12)/4) - x \\
&= (x + 3) - x \\
&= 3
\end{aligned}
$$

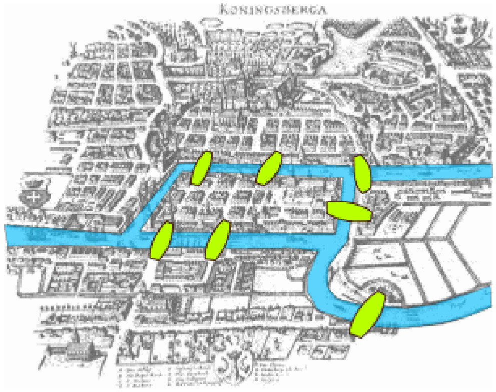
Zobrali sme ľubovolné reálne číslo a pomocou povolených úprav sme výraz upravili. Vyšlo nám, že pôvodný, zložitý vzorec je vlastne len zložito zapísaná trojka. To znamená, že nech zvolím akékoľvek vstupné číslo a prevediem horeuvedené úpravy, vždy dostanem 3 ako výsledok.

2. Sedem mostov mesta Kráľovec (Seven bridges of Königsberg) [12]

Zadanie

Kráľ sa rozhodol, že sa chce prejsť po svojom obľúbenom meste. Lenže bol lenivý, a tiež nedokázal dlho sústrediť svoju pozornosť. Vystavil následujúcu úlohu:

Treba nájsť cestu cez mesto tak, aby som pri prechádzke prešiel po každom moste práve raz. Na ostrovy sa nedá dostať iným spôsobom ako mostom a musím prejsť po každom moste. Ak už raz vstúpim na most, prejdem ho celý. Samozrejme, nemusím začínať a končiť v tom istom mieste, naspäť sa rád dopravím kočom. Existuje takáto prechádzka?

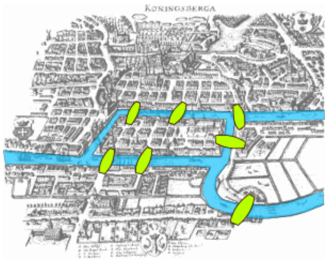


Obr. 1: Zdroj: [9]

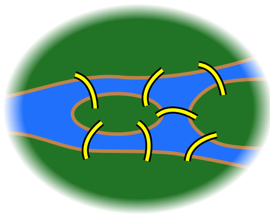
Riešenie

Slávny švajčiarský matematik Leonhard Euler ako prvý dokázal, že tento problém nemá žiadne riešenie. Jediná dôležitá vlastnosť cesty je poradie prechodu mostov. Preformuloval teda problém na abstraktnejší (čím položil základy budúcej teorie grafov). Eliminoval všetko až na zoznam pevnín a mostov, ktoré ich spájajú. V pojmoch teórie grafov by sa kusy pevniny nazvali „vrcholy“ a mosty ich spájajúce by sme nazvali „hrany.“ Výsledná štruktúra sa nazýva graf.

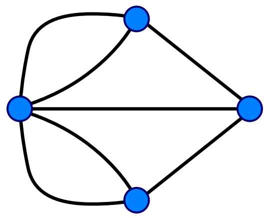
Poznámka: Takáto reprezentácia tohoto problému nám nedá graf, ale tzv. multigraf – graf, v ktorom dovolíme, aby medzi dvoma vrcholmi viedla viac než jedna cesta.



[9] $\longrightarrow$



[5] $\longrightarrow$



[10]

Spôsob, akým graf nakreslíme, nič na grafe nemení – podstatnou informáciou je, množina vrcholov, a ktoré vrcholy sú spojené hranou a ktoré nie.

Euler si všimol, že počas prechádzky každý krát keď navšívim vrchol po moste aj opustím vrchol po moste. Teda (okrem štartového a cieloveho vrcholu) počet príchodov do vrcholu sa rovná počtu odchodov z vrcholu. To znamená, že počet mostov ktoré sa dotýkajú vrcholu, musí byť párny (# prichod = # odchod, zároveň platí, že súčet dvoch rovnakých prirodzených čísel je vždy parne číslo).

Keď si však nakreslíme pôvodný problém, zistíme, že počet mostov dotýkajúcich sa vrcholov je dokonca vždy nepárny. Začiatok a koniec prechádzky by mohol mať nepárny počet mostov – avšak prechádzka nemôže začínať alebo končiť vo všetkých 4 vrcholoch, preto sa takáto prechádzka v Královci uskutočniť nedá.

Tento problém vedie na teóriu grafov, veľmi zaujímavej časti matematiky. V reči teorie grafov sme práve ukázali, že v tomto multigrafe neexistuje (otvorený ani uzatvorený) Eulerovský ťah (pomenovaný na počesť Eulerovho riešenia práve tohoto problému).

3. Problém 100 väzňov (The Locker Problem) [4]

Zadanie

Riaditeľ väznice sa rozhodne dať poslednú šancu svojim 100 väzňom odsúdeným na smrť. Do svojej kancelárie, kde má 100 zásuviek (označených číslami 1-100) náhodne umiestni kartičky s číslami väzňov, ktorí sú tiež označení číslami 1-100. Väzni majú po jednom vchádzať do kancelárie. Každému dovolí otvoriť najviac 50 zásuviek. Z miestnosti odchádzajú inou chodbou, nemajú ako podať ďalším čakajúcim väzňom informácie.

Riaditeľ väznice sa rozhodol, že **omilostí všetkých** väzňov, ale iba **(práve) vtedy**, keď sa **každému** z väzňov **podarí nájsť svoje číslo** v jednej z 50 otvorených zásuviek. Ak čo len jeden z nich svoje číslo nenájde, všetci zomrú. Akú stratégiu majú väzni použiť, ak chcú mať čo najväčšiu šancu prežiť?

Naivné riešenie

Ak každý väzeň otvorí 50 zásuviek náhodne, pravdepodobnosť, že jednotlivý väzeň nájde svoje číslo je 50%. Teda súhrnná pravdepodobnosť pre všetkých je súčin pravdepodobností jednotlivcov:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}_{100\times} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 0.0000000000000000000000000000008$$

To je veľmi, veľmi malé číslo. Situácia vyzerá pre väzňov beznádejne.

Stratégia

Existuje však lepšia stratégia. Dôležité uvedomiť si je, že väzňom nezáleží na tom, aby čo najviac z nich našlo svoje číslo, ale na tom, aby všetci našli svoje číslo. [2]

Víťazná stratégia je nasledovná: [3]

1. Každý väzeň otvorí zásuvku, ktorá má jeho číslo.
2. Ak táto zásuvka obsahuje jeho číslo, ukončí hľadanie a bol úspešný.
3. V opačnom prípade zásuvka obsahuje číslo iného väzňa. Väzeň otvorí zásuvku s číslom toho iného väzňa.
4. Väzeň opakuje kroky 2 a 3 až kým nenájde svoje číslo alebo otvorí 50 zásuviek.

Tento prístup zaručuje, že nebude otvárať zásuvky opakovane. Môžeme si všimnúť, že ak sa mu niekedy podarí „uzavrieť cyklus“ – teda dostať sa naspäť do prvej otvorenej zásuvky, tak posledná otvorená zásuvka obsahuje jeho číslo (odkázala ho na zásuvku s jeho číslom, teda musela obsahovať jeho číslo).

Príklady

Ukážeme si, že táto stratégia znie pre väzňov relatívne výhodne. Uvážime zmenšenú situáciu s 8 väzňami a 8 zásuvkami, kde každý väzeň smie otvoriť 4 zásuvky. Riaditeľ rozmiestnil čísla do zásuviek nasledovne:

číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	7	4	6	8	1	3	5	2

Väzni konajú následovne:

- Väzeň 1 otvorí zásuvku 1 a nájde čislo 7. Otvorí zásuvku 7 a nájde číslo 5. Otvorí zásuvku 5 a nájde číslo 1, teda jeho číslo, čiže uspel.
- Väzeň 2 otvorí zásuvky 2, 4 a 8 v tomto poradí. V poslednom nájde svoje číslo.
- Väzeň 3 otvorí zásuvky 3 a 6, kde nájde svoje číslo.
- Väzeň 4 otvorí zásuvky 4, 8 a 2, kde nájde svoje číslo. Všímavý čitateľ si mohol toto odvodiť z konanie väzňa 2.
- Podobne aj väzni 5 až 8 nájdu svoje čísla (dá sa odvodiť z predchádzajúcich informácií).

V tomto prípade všetci väzni boli úspešní. To sa však nestane vždy (na veľké sklamanie väzňov). Uvažme následovné rozostavenie čísel riaditeľom:

číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	3	1	7	5	8	6	4	2

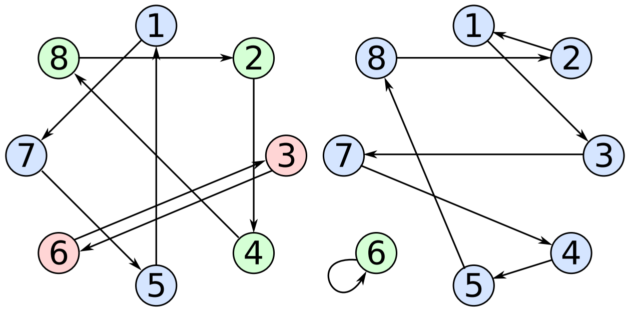
V tomto prípade väzeň 1 otvorí zásuvky 1, 3, 7 a 4, otvorením ktorej musí skončiť, lebo nenašiel svoje číslo a viac ako 4 zásuvky otvoriť nemôže. Bol neúspešný, teda ďalší väzni už nemusia ani hrať, všetci budú popravení.

Reprezentácia permutáciami

Riaditeľovo rozloženie čísel do zásuviek sa dá matematicky popísať permutáciami čísel 1 až 100. Permutácie sú bijektívne zobrazenia (funkcie) z množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$. Bijektívna funkcia je zároveň prostá a „na“: pre všetky možné čísla z oboru hodnôt existuje práve jedno číslo z definičného oboru. V našom prípade je to teda bijektívna funkcia:

$$p : \{1, 2, \ldots, 100\} \to \{1, 2, \ldots, 100\}$$

Intuitívne si funkciu permutácie predstavíme ako „iné usporiadanie“ prvkov definičného oboru.



Obr. 2: Reprezentácia permutácií (1 7 5)(2 4 8)(3 6) a (1 3 7 4 5 8 2)(6) grafmi. Zdroj: [7], [6]

Každá permutácia sa dá rozložiť na tzv. cykly permutácie (postupnosť čísel, ktoré keď zobrazujem permutačnou funkciu sa eventuálne „vráti“ do prvej hodnoty). Uvedomíme si, že tieto cykly sú vždy disjunktné – nepretínajú sa, nemajú spoločné hodnoty. Permutáciu z prvého príkladu rozpíšeme v tzv. cyklovom zápise následovne:

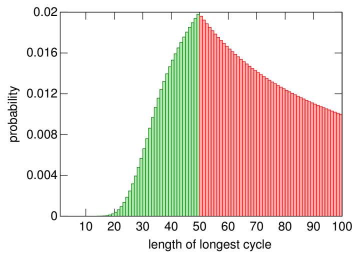
$$(1\ 7\ 5)(2\ 4\ 8)(3\ 6)$$

Pozostáva teda z dvoch cyklov dĺžky 3 a jedného cyklu dĺžky 2. Permutáciu z príkladu 2 zapíšeme následovne:

$$(1\ 3\ 7\ 4\ 5\ 8\ 2)(6)$$

Pozostáva z jedného cyklu dĺžky 7 a jedného cyklu dĺžky 1.

Uvedomíme si, že ak sa v cyklovom zápise rozostavení čísel do zásuviek nachádza cyklus dĺžky väčšej ako počet dovolených otvorení zásuviek, väzni (používajúc túto stratégiu) **musia nutne prehrať** – ak by permutácia v horeuvedených príkladoch mala cyklus dĺžky 5 a viac, všetci väzni, ktorých čísla sú v tomto cykle by prehrali po štyroch otvoreniach.



Obr. 3: Pravdepodobnostná distribúcia dĺžky najdlhšieho cyklu v náhodnej permutácií čísel 1 až 100. Zelená plocha odpovedá pravdepodobnosti prežitia väzňov. Zdroj: [11]

Pravdepodobnosť úspechu stratégie

Vieme, že aj napriek stratégií môžu väzni prehrať. Majú však lepšiu šancu na výhru ako bez nej? Táto otázka sa dá zjednodušiť na otázku: „Zo všetkých permutácií na množine $\{1, 2, \ldots, 100\}$, koľko obsahuje cyklus s dĺžkou väčšou ako 50? “ Na túto otázku dokážeme už číselne odpovedať!

Uvedomíme si, že permutácia čísel 1 až 100 môže obsahovať najviac jeden cyklus s dĺžkou $l > 50$. Existuje presne $\binom{100}{l}$ spôsobov, ako vybrať čísla, ktoré budú do tohoto cyklu patriť (viete z kombinatoriky). V rámci cyklu môžeme čísla usporiadať $(l-1)!$ spôsobmi – čísla usporiadame $l!$ spôsobmi, ale každé usporiadanie sa tam bude opakovať l-krát, iba bude otočené – teda stále ten istý cyklus – platí: $\frac{l!}{l} = (l-1)!$. Zvyšné čísla, nepatriace cyklu, usporiadame $(100-l)!$ spôsobmi. Celkový počet vhodných permutácií je teda:

$$\binom{100}{l} \cdot (l-1)! \cdot (100-l)! = \frac{100!}{l}$$

Pravdepodobnosť, že náhodná permutácia obsahuje cyklus dĺžky väčšej ako 50 spočítame nasledovne (pomocou pravidla o nezávislých javoch):

$$\frac{1}{100!}\left(\frac{100!}{51} + \ldots + \frac{100!}{100}\right) = \left(\frac{1}{51} + \ldots + \frac{1}{100}\right) = H_{100} - H_{50}$$

kde H_n je n-té harmonické číslo $\left(H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

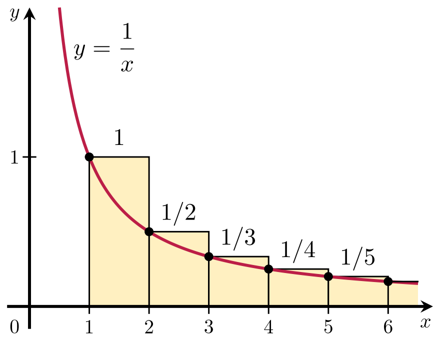
Pravdepodobnosť, že náhodná permutácia neobsahuje žiadny cyklus dĺžky väčšej ako 50 spočítame nasledovne (pomocou pravidla o opačnom jave):

$$1 - (H_{100} - H_{50}) \approx 0.31183$$

Väzni prežijú pomocou stratégie permutačných cyklov s pravdepodobnosťou väčšou než 30%! [3] Príklad sa tu dá ukončiť. Ďalej si však ukážeme, čo sa s pravdepodobnosťou deje, ak by sme uvážili väčšie počty väzňov a budeme sa zaoberať tým, či existuje aj lepšia stratégia (spoiler: neexistuje). Zvyšok sa už opiera o trochu zložitejšiu matematiku.

Asymptotika

Ak uvážime $2n$ väzňov namiesto 100, kde $n \in \mathbb{N}$ je ľubovolné prirodzené číslo, pravdepodobnosť prežitia väzňov s cyklovou stratégiou je daná:



Obr. 4: Harmonické čísla sú odhadom daným plochou pod hyperbolou – dajú sa teda odhadnúť logaritmom. Zdroj: [8]

$$1 - (H_{2n} - H_n) = 1 - (H_{2n} - \ln 2n) + (H_n - \ln n) - \ln 2$$

S Euler-Mascheroni-ho konštantou γ pre $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$$

platí, čo vedie k asymptotickej pravdepodbnosti prežitia:

$$\lim_{n\to\infty} (1 - H_{2n} + H_n) = 1 - \gamma + \gamma - \ln 2 = 1 - \ln 2 \approx 0.30685$$

Postupnosť pravdepodobností je nerastúca (monotónna), pravdepodobnosť prežitia väzňov je väčšia ako 30%, nezávisle od počtu väzňov. [3]

Optimalita

V 2006, Eugene Curtin a Max Warshauer (z University of Texas) dodali dôkaz optimality tejto cyklovej stratégie. Dôkaz je založený na ekvivalencí s podobným problémom, kde väzni majú dovolené byť prítomní v miestnosti a pozorovať otváranie zásuviek inými väzňami. Táto ekvivalencia je založená na ekvivalencí cyklického zápisu a jednoriadkového zápisu permutácií (spodný riadok dvojriadkového zápisu). V tomto probléme je nezávisle na stratégií pravdepodobnosť prežitia rovná pravdepodobnosti v pôvodnom probléme. Keďže ľubovolná stratégia z pôvodného problému sa dá aplikovať na pozmenený problém, ale nikdy nedosiahne väčšiu úspešnosť, musí byť cyklová stratégia optimálna. [2]

Bonusové úlohy

B1. Kráľ a jeho traja radcovia (The King's Wise Men) [13]

Zadanie

Kráľ mal troch **múdrych** radcov, ale chcel vedieť, ktorý z nich je najmúdrejší. Každému dal na hlavu klobúk a rozostavil ich tak, aby každý videl na klobúky zvyšných dvoch, ale nie na svoj. Každý klobúk bol buď žltý, alebo modrý. Kráľ im oznámil, že **aspoň jeden** z nich má na hlave modrý klobúk a dodal, že súťaž je **férová voči všetkým** z nich. Zakázal im akúkoľvek vzájomnú komunikáciu. Kto prvý vstane a povie, akej farby klobúk má na hlave, bude vyhlásený za najmúdrejšieho v celom kráľovstve.

Radcovia dlho stáli a rozmýšľali, keď zrazu sa najmúdrejší z nich postavil a správne odpovedal na otázku. Čo povedal a ako na to prišiel?

Riešenie

Toto je jeden z najjednoduchších *indukčných hádaniek* a jeden z najjasnejších príkladov tejto metódy. Predpokladajme, že sme ten najmúdrejší z radcov.

Predpokladajme, že je práve jeden klobúk modrý. Osoba s týmto klobúkom by videla dva žlté klobúky a keďže kráľ povedal, že aspoň jeden klobúk je modrý, daná osoba by ihneď vedela, že má modrý klobúk. No táto situácia nemôže nastať, lebo pre zvyšných dvoch radcov by úloha nebola férová (nevedeli by vyvodiť z toho čo vidia nič) a kráľ povedal, že úloha je férová. Takže modré klobúky sú aspoň dva.

Tak predpokladajme, že sú práve dva. Každý radca s modrým klobúkom by videl jeden modrý a jeden žltý. Keďže už vedia, že musia byť aspoň dva modré, vedeli by ihneď, že majú na hlave klobúk modrý. Toto je znova v spore s férovosťou, lebo radca so žltým klobúkom nevie vyvodiť zo situácie, ktorú vidí, nič. Takže musia byť modré klobúky aspoň tri.

Viac ako tri byť nemôžu, lebo sú len traja radcovia, takže sú práve tri. Radca, ktorý si to ako prvý uvedomí vstane a povie, že musia byť všetky tri klobúky modré a teda aj ten jeho je modrý.

B2. Dvaja štatistici v lese (Two statisticians in the woods) [1]

Hypotéza

Ak sa dvaja štatistici stratia navzájom v nekonečnom lese, prvé čo spravia bude, že sa opijú. Týmto spôsobom budú blúdiť viac-menej náhodne, čo im dáva najlepšiu šancu sa znova nájsť. Ale štatistici by mali ostať triezvi, ak by hľadali huby. Keby sa potácali podnapití, zmenšili by prebádanú plochu a s väčšou pravdepodobnosťou by sa vrátili na miesto, kde už predtým všetko vyzbierali.

Riešenie

Riešenie presahuje rozsah tohoto dokumentu. Nájdete ho v origináli na [1].

Prezentáciu k prednáške nájdete na: `http://oskopek.com/2015_popmath_gymy/svk_presentation.pdf`
Riešené príklady nájdete na: `http://oskopek.com/2015_popmath_gymy/svk_exercises.pdf`

References

[1] Rhett Allain. *How Should Two Lost People Find Each Other?* 2013. URL: http://www.wired.com/2013/09/two-statisticians-lost-in-the-woods/.

[2] Max Warshauer Eugene Curtin. "The locker puzzle". In: *Mathematical Intelligencer* (2006).

[3] Richard P. Stanley. *Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More.* 2014.

[4] Wikipedia. *100 prisoners problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem.

[5] Wikipedia. *7 bridges.* 2015. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:7_bridges.svg.

[6] Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 3 7 4 5 8 2)(6).* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl2.svg.

[7] Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 7 5)(2 4 8)(3 6).* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl1.svg.

[8] Wikipedia. *Illustration of the integral test in calculus.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Integral_Test.svg.

[9] Wikipedia. *Konigsberg bridges.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png.

[10] Wikipedia. *Konigsberg graph.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:K%C3%B6nigsberg_graph.svg.

[11] Wikipedia. *Probability mass function of the length of the longest cycle of a random permutation of length 100. Cycle lengths <= 50 are green, cycle lengths > 50 are red.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_longest_cycle_length_pmf_qtl2.svg.

[12] Wikipedia. *Seven Bridges of Königsberg.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg.

[13] Wikipedia. *The King's Wise Men.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Induction_puzzles#Examples.